משפט יחידות ראשון

]מעל חוג ראשי R, כל מטריצה דומה[1] למטריצה אלכסונית $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots d_n)$, $d_1 \mid \cdots \mid d_n$.[

הצגת מטריצה בצורה $A \sim \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ כנ"ל יחידה עד כדי חברים של כל d_i.
בפרט האידיאלים Rd_i יחידים.

תזכורת

"מינור"(בגודל k) של מטריצה A הוא הדטרמיננטה של תת מטריצה בגודל $k \times k$(בוחרים k עמודות וk שורות בלי לאלץ קשרים ביניהם - לאו דווקא רציף, לאו דווקא על האלכסון).
האידאל הנוצר על ידי כל המינורים בגודל $k \times k$ = $\Delta_k(A)$.

דוגמה

נניח ש $A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$, $d_1 \mid \cdots \mid d_n$.

$$\Delta_1(A) = \langle d_1, d_2, \dots d_n \rangle = d_1 R$$

$$\Delta_k(A) = \langle k \times k \text{ minors of } A \rangle = \langle \text{main } k \times k \text{ minors of } A \rangle = \langle d_{i_1} \cdots d_{i_k} \rangle = d_1 \cdots d_k R$$

למה

לכל A, B,

$$\Delta_k(AB) \subseteq \Delta_k(A), \Delta_k(B)$$

מסקנה

נניח $B \sim A$. כלומר $B = PAQ$, P, Q הפיכות.

$$\Delta_k(B) \subseteq \Delta_k(PA) \subseteq \Delta_k(A)$$

אבל גם $A = P^{-1}BQ^{-1}$ ולכן גם

$$\Delta_k(A) \subseteq \Delta_k(B)$$

---

[1] $A \sim B$ אם $B = PAQ$ כאשר P, Q הפיכות

מסקנה

נניח ש $A' = \begin{pmatrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = A$.

$$d_1 \cdots d_k R = \Delta_k(A) = \Delta_k(A) = d'_1 \cdots d'_k R$$

$$\Downarrow$$

$$d_1 \cdots d_k \sim d'_1 \cdots d'_k$$

לפי המקרה $k-1$ במקום k, $d_1 \cdots d_{k-1} \sim d'_1 \cdots d'_{k-1}$ ולכן $d_k \sim d'_k$.

$\surd$ משפט היחידות

דוגמה

מצא את הסדר של החבורה האבלית

$$\left\langle a,b,c \,\middle|\, \begin{matrix} 4a+8b+9c=0 \\ 8a+9b+4c=0 \\ 9a+4b+8c=0 \end{matrix} \right\rangle = \mathbb{Z}^3 / \begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}^3 / \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 7 & \\ & & 63 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^3$$

)

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 7 & \\ & & 63 \end{pmatrix} \cong \mathbb{Z}^3 /$$

$$\Delta_1(A) = d_1 R$$

$$\Delta_2(A) = d_1 d_2 R = \langle 28, 49, \ldots \rangle$$

$$\Delta_3(A) = d_1 d_2 d_3 R$$

)

הוכחת הלמה ממקודם

מספיק להוכיח $\Delta_k(AB) \subseteq \Delta_k(B)$. מספיק להוכיח שכל מינור $k \times k$ של AB שייך ל$\Delta_k(B)$.

מכיוון שהמינור של AB מחושב מהשורות המתאימות בA והעמודות המתאימות בB, אפשר להניח ש$A \in M_{k\times n}(R)$, $B \in M_{n\times k}(R)$ ואז $AB \in M_k(R)$.

$$\det(AB) = \sum_{\sigma\in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) \prod_{i=1}^{k} (AB)_{i,\sigma i} = \sum_{\sigma\in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{j,\sigma i} \right) =$$

$$= \sum_{\sigma} \sum_{j_1,\dots j_k=1,\dots n} (\mathrm{sgn}\sigma) \prod A_{ij_i} B_{j_i,\sigma i} = \sum_{j_1,\dots j_k} A_{1j_1} \cdots A_{kj_k} \cdot \sum_{\sigma\in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) B_{j_1,\sigma 1} \cdots B_{j_k,\sigma k} =$$

$= \sum_{j_1,\dots j_k} A_{1j_1} \cdots A_{kj_k} \det(B$ ב$j_1,\dots j_k$ המטריצה המתקבלת מבחירת שורות)

כלומר

$$\det(AB) \in \Delta_k(B)$$

ולכן

$$\Delta_k(AB) \subseteq \Delta_k(B)$$

מסקנה